Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τμήμα Φυσικής, Σπουδαστήριο Μηχανικής

- Μελετλίδου Ευθυμία

- Κρυφοί Ελκυστές και εφαρμογή σε ένα πρόβλημα αρμονικού και αναρμονικού ταλαντωτή με **Van der Pol** απώλειες
- Σάββας Κοσμίδης, Δημήτρης Προύσαλης, Τζαμάλ-Οδυσέας Μαάιτα

ΕΛΚΥΣΤΕΣ (ATTRACTORS)

SELF-EXCITED ATTRACTORS

Ασταθή σημεία ισορροπίας

HIDDEN ATTRACTORS

1)Συστήματα χωρίς σημείαισορροπίας
2)Συστήματα με ευσταθή σημεία ισορροπίας
3)Συστήματα με καμπύλες σημείων ισορροπίας

ΚΡΥΦΟΙ ΕΛΚΥΣΤΕΣ

ΚΡΥΦΟΙ ΟΡΙΑΚΟΙ ΚΥΚΛΟΙ (Leonov, Kuznetzov)

ΚΡΥΦΟΙ ΧΑΟΤΙΚΟΙ ΕΛΚΥΣΤΕΣ

ΚΡΥΦΟΙ ΟΡΙΑΚΟΙ ΚΥΚΛΟΙ

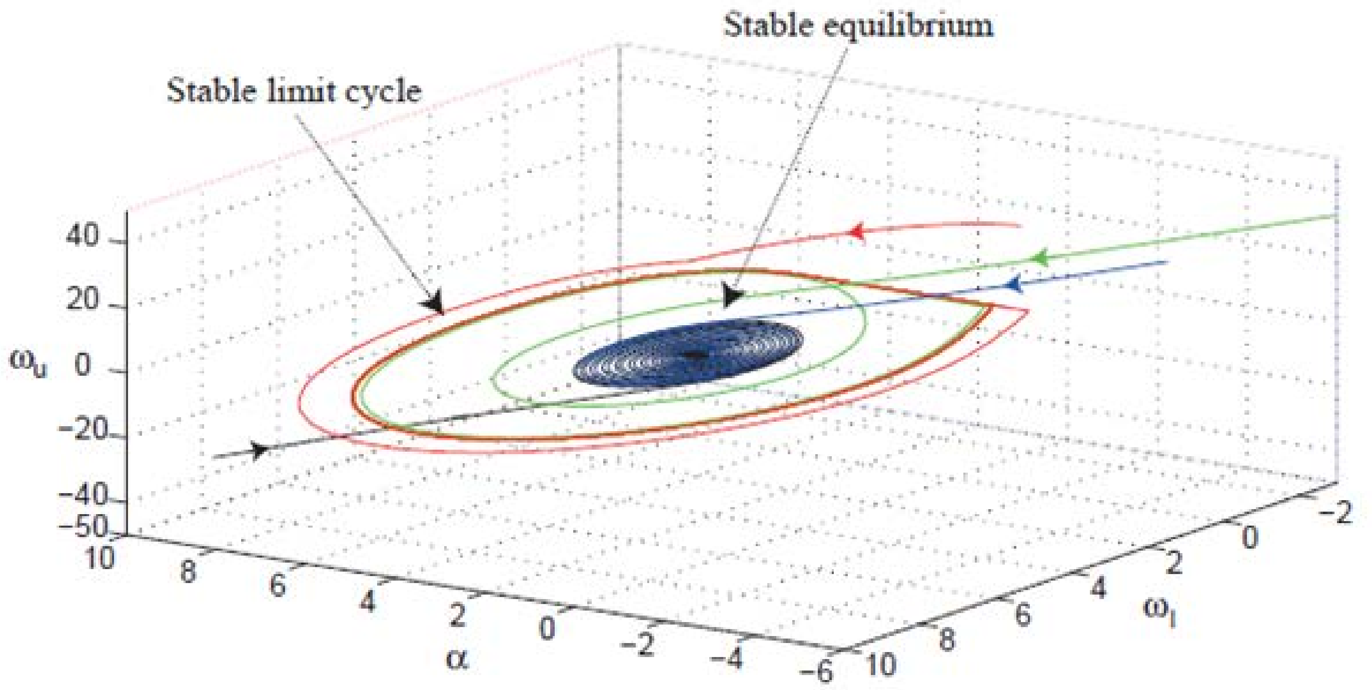
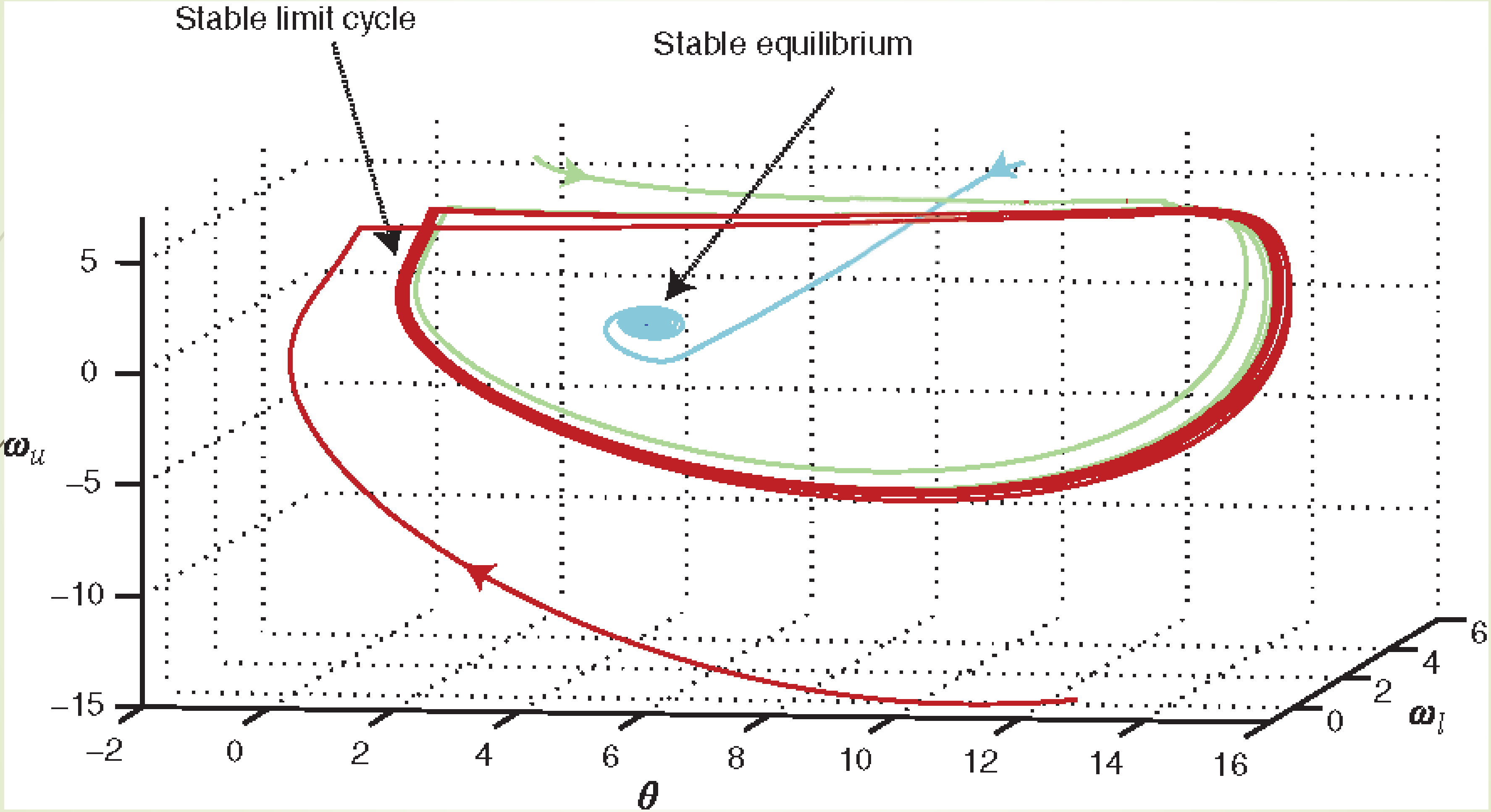


Fig. 31. Stable equilibrium and hidden oscillations — stable limit cycle.



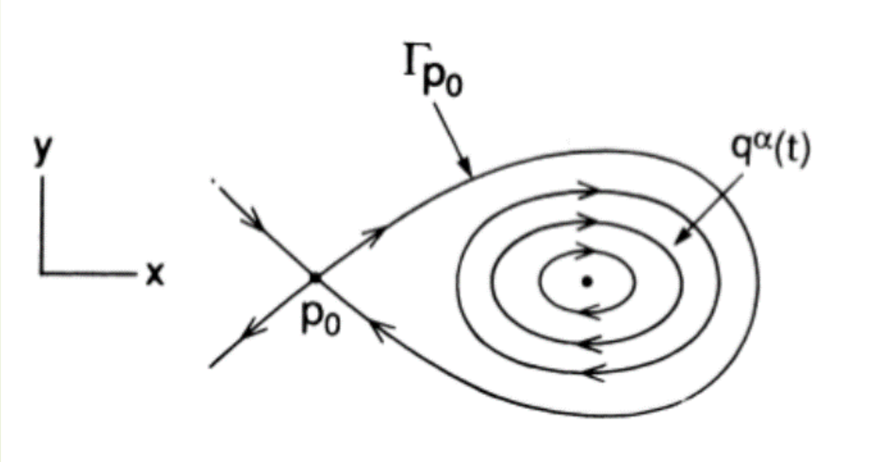
Stable limit cycle
Stable equilibrium
5
0
−5
−10
−15
ω_u
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
θ
0
2
4
6
ω_l

*ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΤΗΤΑ ΚΡΥΦΩΝ ΧΑΟΤΙΚΩΝ ΕΛΚΥΣΤΩΝ -> **ΔΕΝ** ΥΠΑΡΧΕΙ ΑΣΤΑΘΕΣ ΣΗΜΕΙΟ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ*

Μέχρι τώρα μόνο ασταθή σημεία ισορροπίας είχαν παρατηρηθεί ότι δημιουργούν χάος κάτω από συγκεκριμένες θεωρητικές προϋποθέσεις.

Melnikov

Ήταν ο Melnikov που θεώρησε ένα <u>διαταραγμένο</u> μη αυτόνομο διδιάστατο σύστημα που έχει μία περιοδική τροχιά τύπου σάγματος. Οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητές της τέμνονται εγκάρσια και οδηγούμαστε σε χάος



Silnikov

Έχουμε μια ροή φ_t στον R^3 με σημείο ισορροπίας στο σημείο 0 το οποίο έχει μια **θετική πραγματική ιδιοτιμή λ** και **ένα ζεύγος μιγαδικών ιδιοτιμών** $\omega, \overline{\omega}$ **με αρνητικό πραγματικό μέρος .**

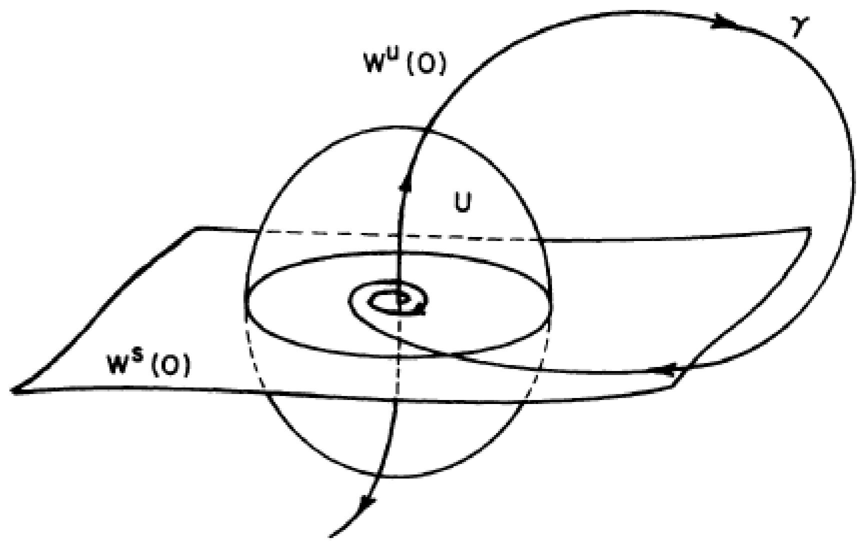


Figure 6.5.1. A homoclinic orbit to a spiral saddle.

Αν |Re ω|<λ , τότε η ροή φ_t μπορεί να <u>διαταραχθεί</u> σε μια ροή φ_t' που έχει μια ομοκλινική τροχιά γ' κοντά στην γ της αδιατάρακτης ροής και η φ_t' έχει αναλλοίωτα σύνολα που περιέχουν εγκάρσιες ομοκλινικές τροχιές

Το 4-ΔΙΑΣΤΑΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

$$\ddot{y} + \varepsilon\lambda(1-(x-y)^2)(\dot{y}-\dot{x}) + C(y-x)^3 + d(y-x) + \varepsilon = 0$$

$$\ddot{x} + d(x-y) = \varepsilon\lambda(1-(x-y)^2)(\dot{y}-\dot{x}) + C(y-x)^3 + \varepsilon$$

- Το αδιατάρακτο σύστημα είναι το ολοκληρώσιμο χαμιλτονιανό σύστημα

$$\ddot{y} + C(y-x)^3 + d(y-x) = 0$$

$$\ddot{x} + d(x-y) = C(y-x)^3$$

$$\dot{y} = p_y$$

$$\dot{x} = p_x$$

$$\dot{p_y} = -C(y-x)^3 - d(y-x)$$

$$\dot{p_x} = C(y-x)^3 + d(y-x)$$

Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x{}^2 + p_y{}^2\right) + \frac{C}{4}(y-x)^4 + \frac{d}{2}(y-x)^2$$

Ολοκλήρωμα της κίνησης

$$p_x + p_y$$

Το διαταραγμένο σύστημα γράφεται :

$$\dot{y} = p_y$$

$$\dot{x} = p_x$$

$$\dot{p_y} = -C(y-x)^3 - d(y-x) - \varepsilon\lambda(1-(x-y)^2)\left(p_y - p_x\right) - \varepsilon^2$$
$$\dot{p_x} = C(y-x)^3 + d(y-x) + \varepsilon\lambda(1-(x-y)^2)(p_y - p_x) + \varepsilon^2$$

* Παραμένει το ολοκλήρωμα $p_x + p_y$!

ΑΠΟΚΛΙΣΗ : $\nabla f = -2\varepsilon\lambda(1-(x-y)^2)$

ΣΗΜΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ: $p_y = p_x = 0\,,\ C(y-x)^3 + d(y-x) + \varepsilon\lambda(1-(x-y)^2)\cancelto{0}{(p_y - p_x)} + \varepsilon^2 = 0$

Άρα καταλήγουμε στο ότι

$y = x + m$ **, όπου** m **είναι η** ***<u>μοναδική</u>*** **πραγματική ρίζα της εξίσωσης**

$$z^3 + az + b = 0 \text{ , με } z = \mathrm{y} - \mathrm{x} \text{ και } a = \frac{d}{c}, b = \frac{\varepsilon^2}{c}$$

Παρατηρησεις

- Έχουμε ευθεία σημείων ισορροπίας
- Το m είναι πολύ μικρό

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ : $k_1 = 0$ **->** **<u>διπλή</u> μηδενική ιδιοτιμή**

$$k_{2,3} = -2\varepsilon\lambda(1-(x-y)^2) \pm \sqrt{\boldsymbol{-4(2d+6c}(x-y)^2) - \boldsymbol{2\varepsilon\lambda}((x-y)^2 - \boldsymbol{1})}$$

$|x-y| \ll 1$, άρα οι ιδιοτιμές $k_{2,3}$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος

ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ: $k_1 = 0$ **->** $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ **Ουδέτερος υπόχωρος (ουδέτερη συμπεριφορά)**

$$k_{2,3} \text{ -> } \left(\frac{\mathbf{1}}{-\delta+\sqrt{2\gamma+\delta^2}}, -\frac{\mathbf{1}}{-\delta+\sqrt{2\gamma+\delta^2}}, \mathbf{-1}, \mathbf{1}\right) \text{ και } \left(-\frac{\mathbf{1}}{\delta+\sqrt{2\gamma+\delta^2}}, \frac{\mathbf{1}}{\delta+\sqrt{2\gamma+\delta^2}}, \mathbf{-1}, \mathbf{1}\right)$$

Ευσταθής υπόχωρος

$\gamma = -d - 3c(y-x)^2 - 2\varepsilon\lambda(p_y - p_x)(x-y)$
$\delta = -\varepsilon\lambda(1-(x-y)^2)$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

$$\dot{u} = p_u$$

$$\dot{v} = p_v$$

$$\dot{p}_u = -4Cu^3 - 2du - \varepsilon\lambda(1 - 2u^2)p_u - \sqrt{2}\varepsilon$$

$$\dot{p}_v = 0$$

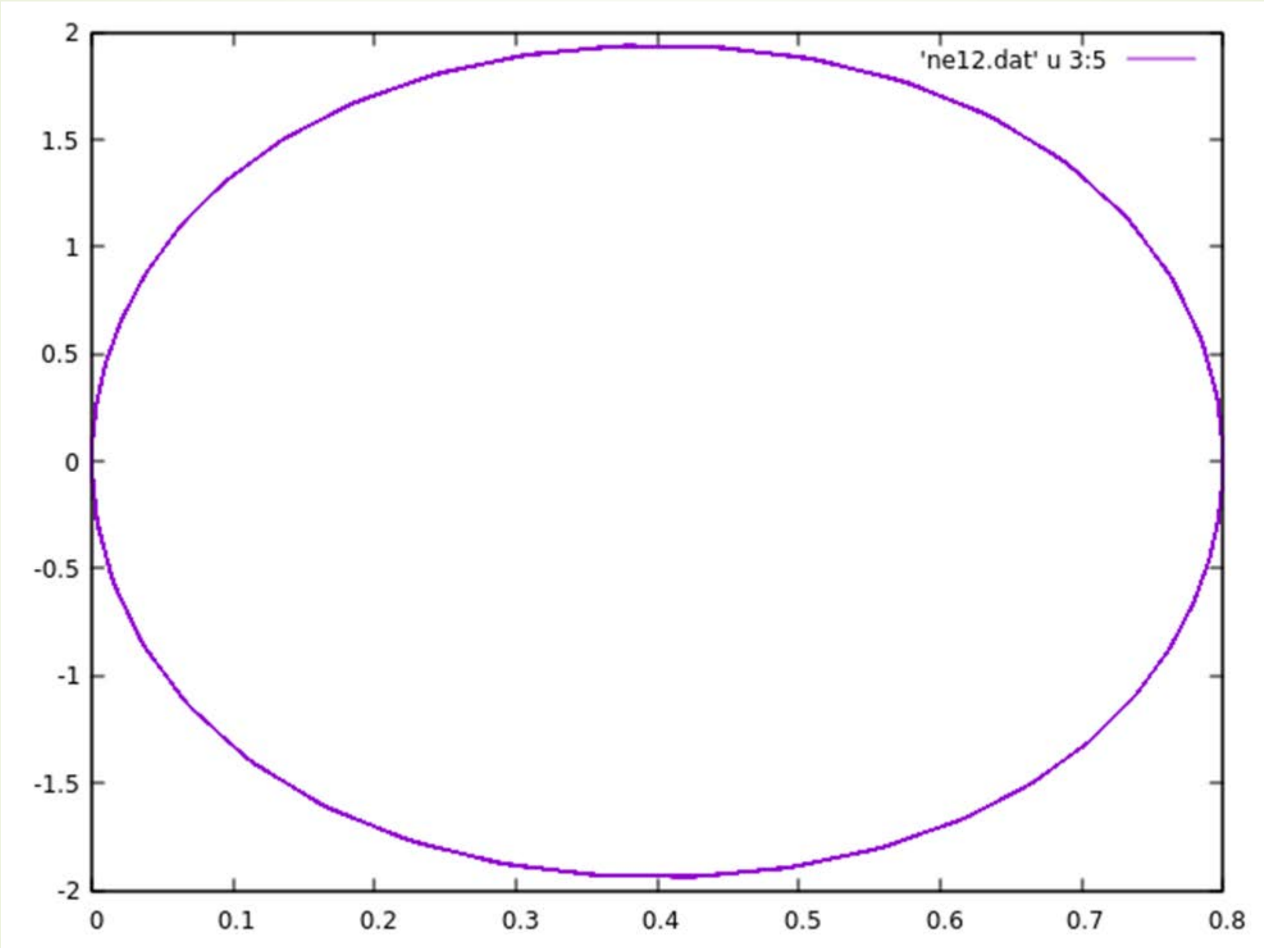
όπου $\boldsymbol{u = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x)}$ **και** $\boldsymbol{v = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)}$**.**

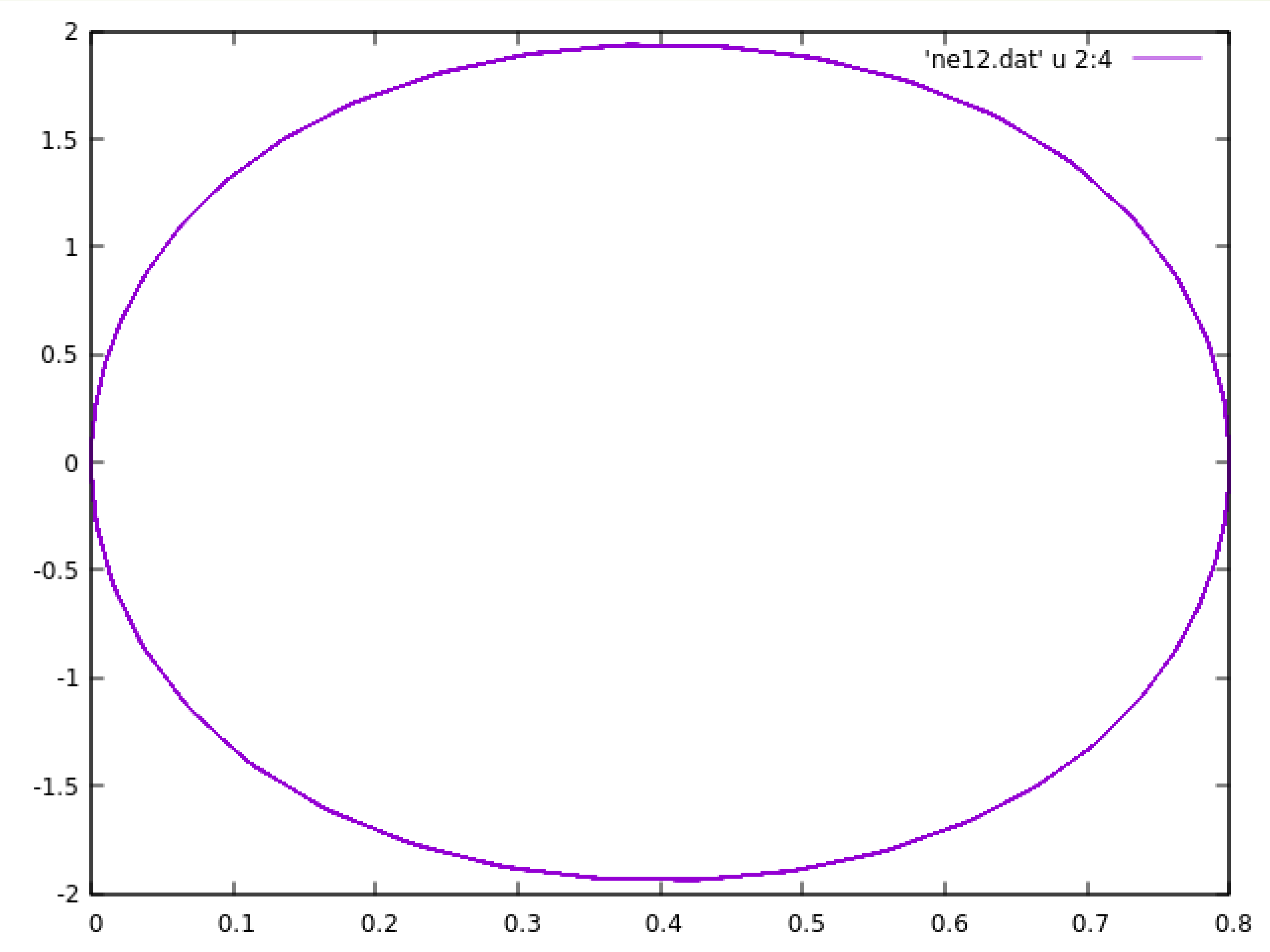
$p_v = p_{vo},\ \ v = p_{v0}t + v_0$

Άρα οριακοί κύκλοι υπάρχουν μόνο πάνω στην επιφάνεια

$$\boldsymbol{p_v = p_x + p_y = 0}$$

$\varepsilon=0.0001$
$C= 5.5$
$d=10$
$\lambda= 0.001$
$m= -10^{-9}$
$y(0)=0.8$
$x(0)=0$
$py(0)=0$
$Px(0)=0$





'ne12.dat' u 2:4
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8